**UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI**
**ECOLE NATIONALE DES SCIENCES**
**APPLIQUEES D' ALHOCEIMA (ENSAH)**

**Deuxième année préparatoire**

Cours

==================================================

# Probabilités et Statistiques Descriptives

==================================================

Réalisé par Pr. **ABDELHAFID SALMANI**

Année universitaire 2020-2021

# Table des matières

# Chapitre 1

# Notions élémentaires du calcul des probabilités

## 1.1 Généralités sur les ensembles et événements aléatoires

### 1.1.1 Généralités sur les ensembles :

**Définition 1.1.1** - *Cardinal*
*Le cardinal d'un ensemble fini $A$, noté $card(A)$, est le nombre d'élément de $A$.*
*Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ a un cardinal nul.*

**Proposition 1.1.1**
*1. Si $A$ et $B$ sont des ensembles finis, l'ensemble des parties de $A$, $\mathcal{P}(A)$ et le produit cartésien $A \times B$ sont des ensembles finis, de cardinal respectifs :*

$$card\mathcal{P}(A) = 2^{card(A)}$$

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

*2. Le cardinal du complémentaire d'un sous ensemble $A$ d'un ensemble $\Omega$ se déduit du cardinal de $A$ et de $\Omega$ :*

$$card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$$

*3. Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles d'un ensemble fini alors*

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

**Remarque 1.1.1**
*Le cardinal de la réunion de deux sous-ensembles disjoints est la somme des cardinaux :*
$A \cap B = \varnothing \Longrightarrow card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

**Définition 1.1.2** - *Fonction caractéristique*
*La fonction caractéristique d'un sous ensemble $A$ d'un ensemble $\Omega$ est la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

**Proposition 1.1.2**
*1.La fonction caractéristique de l'intersection de deux sous ensembles $A$ et $B$ d'un ensemble $\Omega$ est le produit des fonctions caractéristiques :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

*2. La fonction caratéristique du complémentaire d'un sous ensemble $A$ d'un ensemble $\Omega$ est le complémentaire de la fonction caractéristique :*

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega).$$

*3. Si $\Omega$ est un ensemble fini, le cardinal de $A$ se calcule à partir de la fonction caractéristique :*

$$card(A) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

**Theorème 1.1.1** - *Formule du crible*
*Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont $n$ sous ensembles d'un ensemble fini $\Omega$, le cardinal de la réunion se déduit des cardinaux des intersections finis par la formule du cribe :*

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{J\subset[1,n], card(J)=k} card(\bigcap_{j\in J} A_j)}_{C_n^k termes}$$

**Remarque 1.1.2**
*La formule du crible peut s'écrire sous forme dévelopée :*

- *lorsque n=2 :*
$$card(A\cup B) = card(A) + card(B) - card(A\cap B)$$
- *lorsque n=3 :*
$$\begin{aligned} card(A\cup B\cup C) &= card(A) + card(B) + card(C) \\ &\quad - card(A\cap B) - card(A\cap C) - card(B\cap C) + card(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$
- *En général :*
$$\begin{aligned} card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} (card A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} card(A_i\cap A_j) \\ &+ ... + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} card(\bigcap_{1\leq j\leq n} A_{i_j}) \\ &+ ... + (-1)^{n+1} card(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} card(\bigcap_{1\leq j\leq n} A_{i_j}) \end{aligned}$$

**Corollaire 1.1.1** - *Réunion d'ensembles disjoints*
*Le cardinal de la réunion de sous ensembles deux à deux disjoints est la somme des cardinaux :*

$$(\forall i\neq j, A_i\cap A_j = \varnothing) \Longrightarrow card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i).$$

### 1.1.2 Evénements aléatoires

L'étude d'un phénomène aléatoire commence par la description de l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

**Exemple 1**

*Expérience 1 :*

*On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro apparu sur la face supérieure. On obtient un nombre* $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

$\omega \in \Omega$ *est appelé une réalisation ou une "épreuve".*

$A \subset \Omega$ *est appelé un événement.*

$A =$ *"le nombre obtenu est pair" ,* $A$ *est réalisé* $\Longleftrightarrow \omega \in \{2, 4, 6\}$.

*Expérience 2 :*

*Soit un jeu de dominos (chacun des dominos porte deux nombres de* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *éventuellement identiques).*

*On tire au hasard un domino. On obtient une paire* $\{x, y\} \in \Omega = \{\{x, y\} : x, y \in \{0, 1, 2, ..., 6\}\}$

$\{x, y\}$ *est une rélaisation ou une épreuve.*

$A \subset \Omega$ *est appelé un événement.*

$A =$ *l'événement "la somme des deux nombres obtenus est supérieure ou égale à 8"*

$$A = \{\{x, y\}/x + y \geq 8\}$$
$$= \{\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{2, 6\}, \{6, 6\}\}$$

$A$ *est réalisé* $\Longleftrightarrow \{x, y\} \in A$.

**Exemple 2**

| *N°* | *Expérience* | *Ensemble de résultats possibles* |
|---|---|---|
| *1* | *Jeter un dé et relever le nombre qui est sur sa face supérieure* | $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ |
| *2* | *Jeter une pièce de monnaie* | $\Omega = \{pile; face\} = \{P; F\}$ |
| *3* | *Compter le nombre de personnes entrant dans un magasin entre 8h 30 et 22h* | $\Omega = \{1, 2, 3, ....\} = \mathbb{N}$ |
| *4* | *Jeter un dé deux fois de suite* | $\Omega = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); ...; (1, 6); (2, 1); ...; (6, 6)\}$ |
| *5* | *Jeter une pièce de monnaie trois fois de suite* | $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ |
| *6* | *Observer la durée de vie d'une ampoule électrique* | $\Omega = \mathbb{R}^+$ |

Les sous-ensembles de $\Omega$ sont appelés événements. On distingue les événements simples ou événements élémentaires qui sont constitués d'un seul élément (autrement dit, un singleton), des événements composés.

**Exemple 3**

*Dans l'expérience N°4 de l'exemple 2 :*

$A = \{(1, 2)\}$ *est un événement simple.*

$B = \{(1,2);(1,4);(5,3)\}$ *est un événement composé.*
$C = \{$*la somme des points obtenus est égale à* $4\}$. *Il est clair que* $C = \{(1,3);(2,2);(3,1)\}$ *est un événement composé.*

## 1.2 Dénombrement :

### 1.2.1 Permutations d'un ensemble fini

**Définition 1.2.1** - *Permutation*
*Une permutation d'un ensemble fini* $\Omega$ *est une bijection de* $\Omega$ *dans* $\Omega$.

**Theorème 1.2.1** - *Dénombrement des permutations*
*Le nombre de permutations d' un ensemble* $\Omega$ *à* $n$ *éléments est le nombre noté* $n!$ *(factorielle* $n$*) :*

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times n$$

**Démonstration :**
Une permutation $\sigma$ d'un ensemble à $n$ éléments $\omega_i$, numérotés de 1 à $n$ est caractérisée par les images successives de ses éléments :
1. Il y a $n$ possibiltés pour l'image de $\omega_1$,
2. une fois fixée l'image de $\omega_1$, il y a $n-1$ possibiltés pour l'image de $\omega_2$,
3. puis $n-2$ possibiltés pour celle de $\omega_3$, et ainsi de suite
Le nombre total de possibiltés est donc $n \times (n-1) \times ... \times 1$

**Exemple 4**
*Le nombre de façons de trier un jeu de 32 cartes est le nombre de permutations d'un ensemble à 32 éléments, c'est à dire 32!.*

### 1.2.2 Modèle du tirage avec remise

Le tirage avec remise consiste à réaliser le tirage successif de $p$ éléments d'un ensemble $\Omega$, en remettant l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés, successivement (dans laquelle un élément donné peut éventuellement apparaître plusieurs fois)

**Définition 1.2.2** - *Liste(avec répétition)*
*Soit* $\Omega$ *un ensemble fini à* $n$ *éléments. Une p-liste à valeur dans* $\Omega$ *est un p-uplet* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *d'éléments de* $\Omega$.

**Theorème 1.2.2** - *Dénombrement des p-listes*
*Si* $A_p(\Omega)$ *est l'ensemble des p-listes à valeur dans un ensemble* $\Omega$ *à* $n$ *éléments :*

$$card(A_p(\Omega)) = n^p$$

**Démonstration :**

$$A_p(\Omega) = \Omega^p = \underbrace{\Omega \times \Omega \times ... \times \Omega}_{p fois}$$

Donc $$card(A_p(\Omega)) = card(\Omega) \times card(\Omega) \times ... \times card(\Omega) = n^p$$

**Exemple 5**
*Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue 5 tirages successifs avec remise et on note les numéros obtenus. Le nombre totale de tirages possibles est le nombre de 5-listes à valeur dans* $\{1, 2, ..., 10\}$*, c'est à dire* $10^5$.

### 1.2.3 Modèle du tirage sans remise

Le tirage sans remise consiste à réaliser p tirages successif d'éléments d'un ensemble $\Omega$, sans remettre l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés successivement (dans laquelle un élément donné ne peut pas apparaître plus d'une fois) :

**Définition 1.2.3** -*Liste sans répétition*
*Une p-liste sans répétition à valeur dans un ensemble* $\Omega$ *est un p-uplet* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *d'éléments de* $\Omega$ *deux à deux distincts. On parle aussi d'arrangement à n éléments est :*

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)...(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & si\ p \leq n \\ \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1**
*-Dénombrement des injections entre ensemble finis*
$A_n^p$ *est le nombre d'injections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments. En effet, si* $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ *est un ensemble à p éléments et* $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ *un ensemble à n éléments, on peut associer à toute injection* $\sigma : A \longrightarrow B$ *la p-listes des images des éléments de* $A : (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_p))$.

**Démonstration :**
Lorsque l'on réalise un tirage sans répétition, on a $n$ choix possibles pour le premier tirage, $n-1$ choix possibles pour le deuxième tirage et ainsi de suite, soit :

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)...(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$$

Si $p \leq n$, on en déduit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
Si $p \geq n+1$, l'un des termes du produit est nul, donc $A_n^p = 0$.

**Exemple 6**
*20 athlètes s'affrontent lors d'une compétition. On suppose qu'il ne peut pas y avoir d'ex-aquo. Le nombre de podiums possibles est le nombre de 3-listes sans répétition dans l'ensemble des 20 athlètes : il y a donc* $A_{20}^3$ *podiums possibles.*

### 1.2.4 Modèle du tirage simultané :

Le tirage simultané consiste à tirer simultanément $k$ éléments d'un ensemble $\Omega$. Le résultat est une partie à $k$ éléments de l'ensemble $\Omega$ :

**Définition 1.2.4** - *Coefficients binomiaux*
*Soient k et n deux entiers. Le coefficient bonomial* $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ *est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*

**Proposition 1.2.1** -*Coefficients binomiaux*
*Les coefficients binomiaux vérifient :*

1. *Complémentaire :*
$$C_n^{n-k} = C_n^k$$
2. *Formule de Pascal :*
$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$
3. *Identité de Van der Monde :*
$$\sum_{p=0}^{k} C_n^p C_m^{k-p} = C_{n+m}^k$$

# 1.3 Espace probabilisé et calcul des probabilités :

## 1.3.1 Définitions et proprietés

**Définition 1.3.1** - *Tribu*
*Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de $\Omega$. $\mathcal{T}$ est une tribu de $\Omega$ si elle vérifie les propriétés suivantes :*
*1) $\Omega \in \mathcal{T}$.*
*2) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{T}$ où $\overline{A}$ est le complémentaire de $A$ dans $\Omega$.*
*3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.*
*Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés événements. En particulier pour tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé élémentaire.*

**Exemple 7**
*L'ensemble des parties de $\Omega$ est une tribu de $\Omega$. C'est la plus grande tribu que l'on peut construire sur $\Omega$. Considérons l'experience aléatoire qui consiste à tirer au hasard un objet sur une ligne de conditionnement sur laquelle circulent trois types d'objets différents : $a, b, c$. L'univers associé à cette experience est $\Omega = \{a, b, c\}$ et l'ensemble des parties de $\Omega$, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$ est une tribu de $\Omega$.*

**Exemple 8**
*Si $A \subset \Omega$, alors $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$ est une tribu de $\Omega$.*

Dans de nombreuses applications, $\Omega$ est $\mathbb{R}$. Dans ce cas, nous ne choisissons pas l'ensemble des parties de $\Omega = \mathbb{R}$ comme tribu. En effet, cet ensemble de parties est beaucoup trop grand pour y définir une probabilité $\mathbb{P}$. On utilisera la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$, c'est à dire la plus petite tribu contenat tous les intervalles de $\mathbb{R}$. Cette tribu est déjà grande et largement suffisante pour les applications pratiques.

**Définition 1.3.2** - *Probabilité*
*Soient $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de $\Omega$. Un probabilté sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0; +\infty[$ telle que :*
*1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*
*2. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.*
*3. $\sigma$-additivité :*

*Pour toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'événements de $\mathcal{T}$ incompatibles deux à deux (c'est à dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), on a :*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**Définition 1.3.3** - *Espace probabilisé*
*Soient $\Omega$ un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu et $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0; +\infty[$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*
*le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé un espace probabilisable et le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé un espace probabilisé.*

**Proposition 1.3.1**
*Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*
*1.* $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
*2.* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
*3.* $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$

**a.** $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. *D'où* $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

**b.** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

*4.* $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{T}$ *on a* , $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$

**Démonstration :**
1. $A$ et $\overline{A}$ forment une réunion disjointe : $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$.
2. $\varnothing = \overline{\Omega}$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.
3. **a.** Soit $A \subset B$. Alors on a la réunion disjointe $B = A \cup (B \cap \overline{A})$
donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.
Comme $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \geq 0$, on a $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
En prenant $B = \Omega$, on obtient l'encadrement voulu.
**b.** D'une part $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.
D'autre part $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$
Donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$, d'où le résultat.

### 1.3.2 Equiprobabilité des événements élémentaires

Considérons $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
On note $\Omega' = \{E_i, 1 \leq i \leq n\}$ une partition de $\Omega$ en événements élémentaires.

**Définition 1.3.4**
*On dit qu'il y a équiprobabilté des événements si :*
$\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_j)$

**Proposition 1.3.1**
*1. S'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, alors*
$\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}$ *où* $n = card(\Omega')$.
*2. Si $A$ est un événement composé :* $A = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$, *alors* $\mathbb{P}(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

**Démonstration :**
1. $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) = n\mathbb{P}(E_1)$ donc $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{n}$
2. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(E_i) = \dfrac{m}{n}$. Alors pour un événement $A$ de cardinal $m$ : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

**Exemple 9**
*Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est fini, les $\omega_i$ étant distincts 2 à 2, la probabilité uniforme sur $\Omega$ est définie en posant $p_i = \frac{1}{n}$.*

**Exemple 10**
*On jette deux dés de couleurs différentes. On note i le résultat du premier dé et j du second dé.*
*On a donc $\Omega = \{(i, j)/1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$*
$Card(\Omega) = 36$.
*On munit l'ensemble $\Omega$ de la probabilité uniforme, $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{36}$.*
*On s'intéresse à la probabilité de la somme $i + j$ des deux dés.*
*Soit l'événement $A_k = \{(i, j) \in \Omega; i + j = k\}; k \in \{2, 3, ...12\}$*
$\mathbb{P}(\{A_2\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$
$\mathbb{P}(\{A_3\}) = \mathbb{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
$\mathbb{P}(\{A_4\}) = \mathbb{P}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$\mathbb{P}(\{A_{12}\}) = \mathbb{P}(\{(6, 6)\}) = \frac{1}{36}$

## 1.4 Probabilité conditionnelle

Dans la pratique, il est très souvent utile de savoir calculer la probabilité d'un événement $A$, conditionnellement à ou sachant l'événement $B$. Par exemple, dans un jeu de dé à 6 faces, quelle est la probabilité que le résultat soit 6 sachant que ce résultat est pair ? Dans cette question, on cherche donc à calculer la probabilité de l'événement $A = \{6\}$ conditionnellement à l'événement $B = \{2, 4, 6\}$. Comme il y a équiprobabilité des tirages et qu'il n'y a qu'une seule chance sur 3 de tirer 6 parmi $\{2, 4, 6\}$, l'intuition nous dit que la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est 1/3. La définition générale qui permet de retrouver ce résultat est l'axiome de Bayes suivant

**Définition 1.4.1** *Probabilité conditionnelle*
*Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et un événement $A$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout $B \in \mathcal{T}$,on définit la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$, noté $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B/A)$, par :*

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \text{ [Axiome de Bayes]}$$

**Remarque 1.4.1**
*-L'application $\mathbb{P}_A$ définit un nouvel espace probabilisé : $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_A)$.*
*-On peut aussi considérer une nouvelle tribu $\mathcal{T}_A$, la tribu-trace sur $A$ constitué des événements $B \cap A$ où $B \in \mathcal{T}$.*
*On a ainsi un autre espace probabilisé : $(A, \mathcal{T}_A, \mathbb{P}_A)$.*

## 1.5 Indépendance et Indépendance mutuelle

### 1.5.1 Indépendance de deux événements

**Définition 1.5.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
*Soient* $A$ *et* $B$ *deus événements tels que* $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$.
*On dit que* $A$ *et* $B$ *sont* $\mathbb{P}$*-indépendants lorsque* $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A/\overline{B})$.

Savoir que $B$ est vrai, ou que $\overline{B}$ est vrai, ne modifie pas la probabilité que $A$ soit vrai.

**Proposition 1.5.1**
*$A$ et $B$ sont deux événements $\mathbb{P}$-indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.*

**Démonstration :**
$\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$ on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B/\overline{A}) \\
&= (1 - \mathbb{P}(\overline{A}))\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B/\overline{A}) \\
&= \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})[\mathbb{P}(B/\overline{A}) - \mathbb{P}(B/A)]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big(\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\Big) &\Longleftrightarrow \Big(\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\Big) \\
&\Longleftrightarrow \Big(\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B/\overline{A})\Big)
\end{aligned}$$

et de même en échangeant les rôles de $A$ et $B$.

**Proposition 1.5.1**
*Si $A$ et $B$ sont des événements $\mathbb{P}$-indépendants, alors $\overline{A}$ et $B$, $A$ et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi $\mathbb{P}$-indépendants.*

**Démonstration :**
Il suffit de démontrer que si $A$ et $B$ sont $\mathbb{P}$-indépendants, alors $A$ et $\overline{B}$ sont $\mathbb{P}$-indépendants :
$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, donc
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A)$
donc $\mathbb{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

### 1.5.2 Indépendance de $n$ événements avec $n \geq 2$

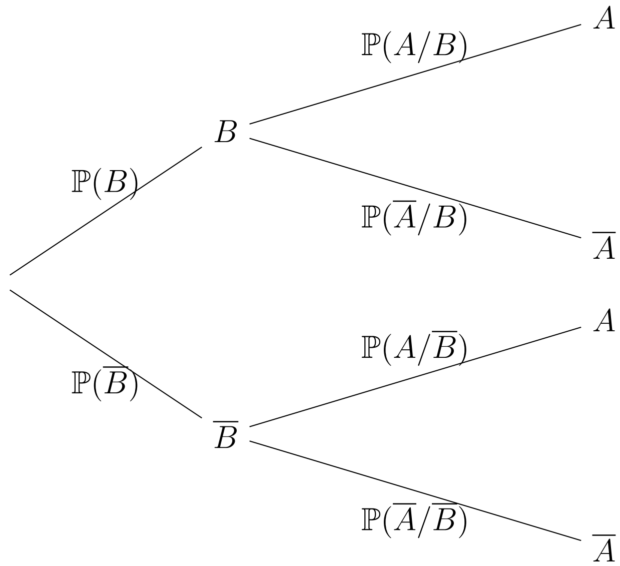
**Définition 1.5.2**
*Soient $A$, $B$ et $C$ 3 événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.*
*Ils sont dits $\mathbb{P}$- mutuellement indépendants si et seulement si :*
*- ils sont 2 à 2 $\mathbb{P}$- indépendants*
*- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$*

Pour $n = 3$, l'indépendance mutuelle entaîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.
**Généralisation :**
$n$ événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dit $\mathbb{P}$- mutuellement indépendants si et seulement si pour toute famille finie $K \subset \{1, 2, ..., n\}$, avec $card(K) \geq 2$, on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i \in K} A_i\Big) = \prod\limits_{i \in K} \mathbb{P}(A_i)$.

Pour $n \geq 3$, l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

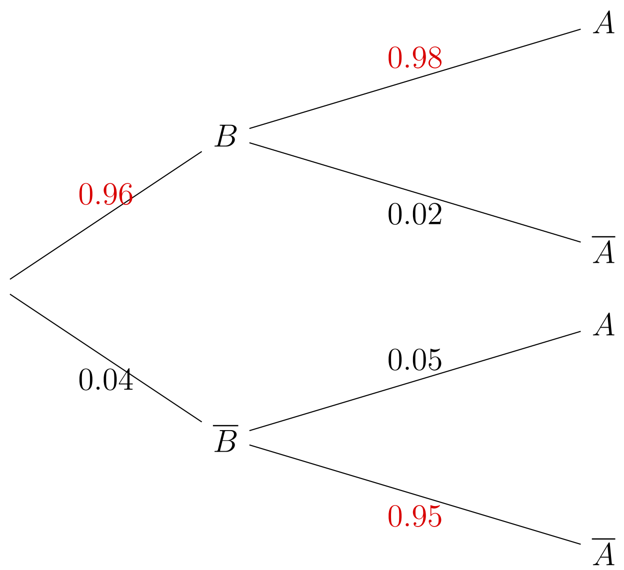
**Exemple 11**
*Une fabrique produit des articles, avec une probabilité globale de 4% qu'ils soient défectueux. Une procédé de contrôle rapide mais imparfait, conduit à mettre au rebut les articles corrects avec une probabilité de 2% et à accepter des articles défetueux avec une probabilité de 5%. Quelle est la probabilité qu'un article pris au hasard soit accepté ?*
*Pour un article, on distingue les événements :*
- *$B$ il est bon ou corrrect*
- *$\overline{B}$ il est déffectueux*
- *$A$ il est accepté au contrôle*
- *$A$ il est refusé*

***Arbre des causes :*** *on représente tous les cas possibles*




*<u>Données</u> : on sait que*
- $\mathbb{P}(\overline{B}) = 0.04$
- $\mathbb{P}(\overline{A}/B) = 0.02$
- $\mathbb{P}(A/\overline{B}) = 0.05$

***Arbre des causes :*** *on représente tous les cas possibles*




*On a* $\Omega = B \cup \overline{B}$ *donc* $A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
*D'où* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$

$$= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A/B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A/\overline{B})$$
$$= 0.96 \times 0.98 + 0.04 \times 0.05 = 0.9458.$$

*Ainsi :* $\mathbb{P}(A) = 0.9428$.

### 1.5.3 Formule de la probabilté complète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini

**Définition 1.5.3**
*Soient* $n \geq 2$, $n$ *événements* $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de probabilités non mullles forment un système complet d'événements si et seulement si constituent une partition de* $\Omega$.

$\Omega$ est ainsi la réunion disjointe de ces événements : $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup .... \cup B_n$.
Soit un système complet d'événements $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$.
Soit $A$ un événement de $\mathcal{T}$, on a

$$A = A \cap \Omega = (A \cap B_1) \cup ... \cup (A \cap B_n)$$
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + .... + \mathbb{P}(A \cap B_n)$$
$$= \mathbb{P}(A/B_1)\mathbb{P}(B_1) + .... + \mathbb{P}(A/B_n)\mathbb{P}(A/B_n)$$

**Theorème 1.5.1** - *Formule de la probabilité complète*
*On suppose que* $\forall i\{1, ..., n\}, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$. *Si* $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est un système complet d'événements, pour tout événement A on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A/B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

## 1.6 Formules de Bayes

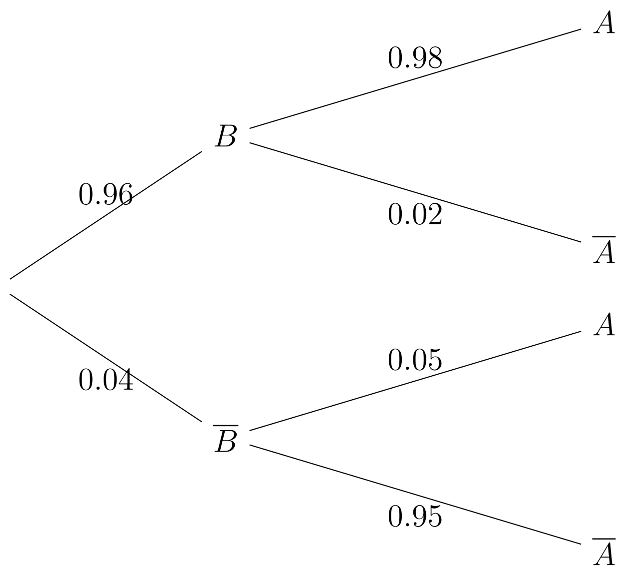
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

**Theorème 1.6.1** - *Formule de Bayes, cas simple*
*Si $A$ et $B$ deux événements tels que $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On a aussi : $\mathbb{P}(A/B).\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A).\mathbb{P}(A)$.
C'est un changement de point de vue : on passe de probabilités "sachant $B$", à des probabilités "sachant A".

**Exemple 12**
*1) Exemple du contrôle de qualité :*
*Pour un article, on a distingué les événements :*
*-$B$ il est bon ou correct*
*-$\overline{B}$ il est défectueux*
*- $A$ il est accepté au contrôle*
*- $\overline{A}$ il est refusé*




*a) Risque de première espèce :*
*Quelle est la probabilité pour qu'un article accepté par ce contrôle rapide soit en réalité défectueux ?*

$$\mathbb{P}(\overline{B}/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.04 \times 0.05}{0.9428} = 0.0021$$

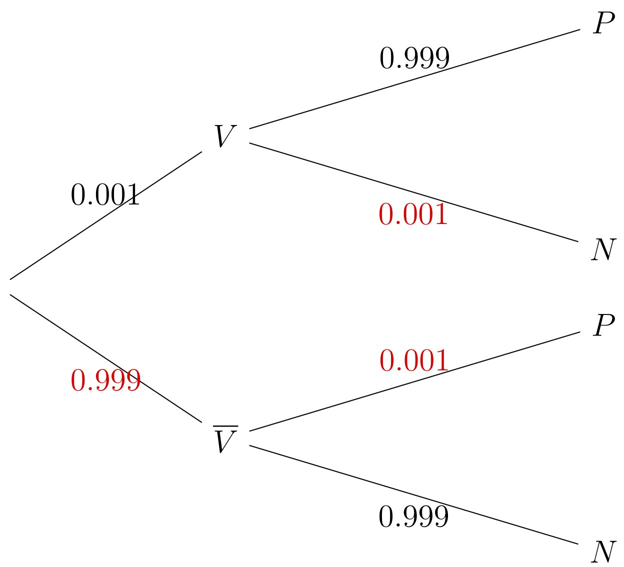
*C'est le risque client.*
*b) Risque de deuxième espèce : Quelle est la probabilité pour qu'un article soit bon, sachant qu'il a été refusé ?*

$$\mathbb{P}(B/\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}/B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0.96 \times 0.02}{0.0572} = 0.0336$$

*C'est le risque vendeur.*
*2) Exemple d'un test :*
*Une population est atteinte par un virus. On dispose d'un test.*
*Pour un individu, on distingue les événements :*
*- $V$ il est porteur du virus*
*- $\overline{V}$ il n'est pas porteur du virus*

*- $P$ son test est positif*
*- $N$ son test est négatif*
*On envisage différentes situations selon :*
*- La probabilité (proportion) qu'une personne soit porteur du virus :* $\mathbb{P}(V)$
*- La probabilité qu'un test soit positif pour un porteur du virus :* $\mathbb{P}(P/V)$
*- La probabilité qu'un test soit négatif pour un non-porteur du virus :* $\mathbb{P}(N/\overline{V})$
<u>$1^{er}$ *cas :*</u> *Les données sont :*

- $\mathbb{P}(V) = 0.001$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.999$
- $\mathbb{P}(N/\overline{V}) = 0.999$

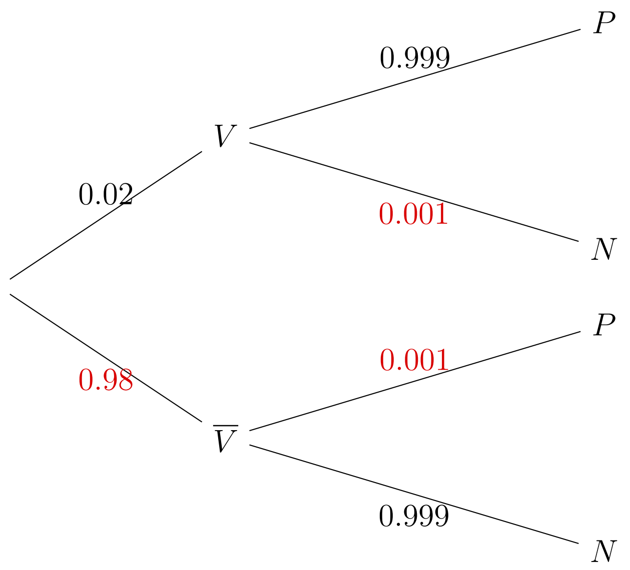



$\mathbb{P}(V/P) = \dfrac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)}$ *est la probabilté d'être porteur du virus, sachant que le test est positif.*

$$\mathbb{P}(V/P) = \frac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(P/\overline{V}) \times \mathbb{P}(\overline{V})}$$
$$= \frac{0.999 \times 0.001}{0.999 \times 0.001 + 0.001 \times 0.999} = \frac{1}{2}$$

<u>$2^{me}$ *cas :*</u>

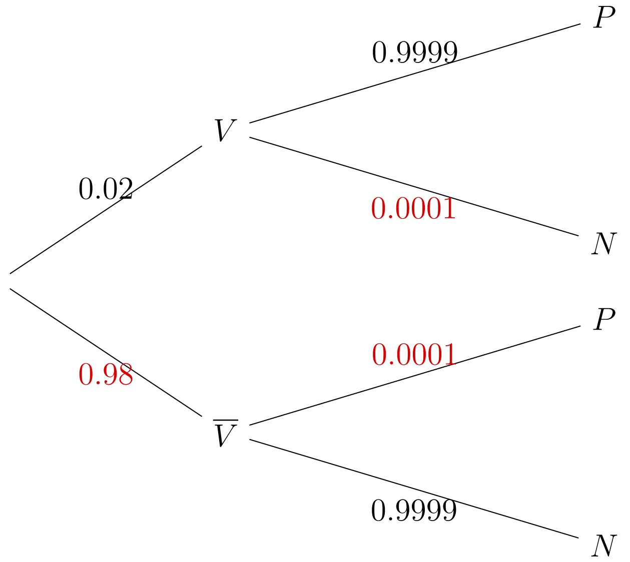
- $\mathbb{P}(V) = 0.02$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.999$
- $\mathbb{P}(N/\overline{V}) = 0.999$




$$\mathbb{P}(V/P) = \frac{\mathbb{P}(P/V)\times\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)}$$
$$= \frac{0.02\times 0.999}{0.02\times 0.999 + 0.98\times 0.001} \approx 0.953$$

<u>$3^{me}$ *cas :*</u>

- $\mathbb{P}(V) = 0.02$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.9999$
- $\mathbb{P}(N/\overline{V}) = 0.9999$




$$\mathbb{P}(V/P) = \frac{\mathbb{P}(P/V)\times\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)}$$
$$= \frac{0.02\times 0.9999}{0.02\times 0.9999 + 0.98\times 0.0001} \approx 0.995$$

**Theorème 1.6.2** - <u>*Formule de Bayes, cas général*</u>
*Soient* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et un entier* $n \geq 1$*. Si* $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ *est un système complet d'événements, avec* $\forall i, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$*, alors, pour* $A$ *tel que* $\mathbb{P}(A) \neq 0$*, on a :*

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \qquad \mathbb{P}(B_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B_j) \times \mathbb{P}(B_j)}{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A/B_i) \times \mathbb{P}(B_i)}$$